

**Легеза В.П.**Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**Нещадим О.М.**Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

## ДВОХФАКТОРНИЙ КРИТЕРІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ І ЙОГО РЕАЛІЗАЦІЯ В ЗАДАЧІ ПРО БРАХІСТОХРОНУ НА ТРАНСЦЕНДЕНТНІЙ ПОВЕРХНІ

Розглядається варіаційна задача щодо пошуку оптимальної кривої руху матеріальної точки на трансцендентній поверхні, яка представляє собою горизонтальний циліндр, напрямною якого є циклоїда. Матеріальна точка рухається по поверхні без тертя і без початкової швидкості у вертикальному однорідному полі тяжіння. Відмінність від попередніх постановок варіаційних задач полягає в тому, що пошук екстремальної кривої ґрунтується на використанні двохфакторного критерію оптимізації замість мінімізації лише одного класичного функціоналу часу. Запропонований критерій полягає у мінімізації добутку функціоналу часу руху матеріальної точки та функціоналу довжини екстремальної кривої, вздовж якої здійснюється рух точки. Така постановка задачі пов'язана з тим, що зазвичай брахістохрона, яка є результатом розв'язку варіаційної задачі в класичній постановці як екстремаль мінімуму лише функціоналу часу, в деяких практичних логістичних задачах має достатньо велику довжину. Сформульовано відповідну ізопериметричну задачу, яка була розв'язана числовими методами. На основі її розв'язання з використанням двохфакторного критерію  $Q(\lambda)$  отримано оптимальний розв'язок задачі про брахістохрону на трансцендентній поверхні. Розв'язок представлено в замкненій формі (для одної з координат – в квадратурах) у вигляді системи трьох параметричних рівнянь, які алгебраїчно описують брахістохронні криві на трансцендентній поверхні. Пошук екстремалей звівся до звичайного встановлення мінімуму критеріальної функції  $Q(\lambda)$  в залежності від значень параметра  $\lambda$ . Числовими методами встановлено, що графік залежності величини критерію  $Q(\lambda)$  від параметра  $\lambda$  має явно виражений локальний мінімум, який й дозволив знайти єдине компромісне значення параметра  $\lambda_E$ . Числовий аналіз підтвердив ефективність використання запропонованого критерію: для оптимальної за цим критерієм траєкторії час руху точки вздовж неї лише на 0,49 % більше, ніж для класичної брахістохрони на трансцендентній поверхні, проте довжина цієї кривої виявляється меншою за довжину класичної брахістохрони на 1,1 %.

**Ключові слова:** двохфакторний критерій оптимізації, функціонал часу, функціонал довжини, брахістохрона, трансцендентна поверхня, циклоїда, ізопериметрична задача.

**Постановка проблеми.** Розроблення нового методологічного підходу щодо використання двохфакторного критерію оптимізації в рамках розв'язання задачі про брахістохрону пов'язано з тим, що за певних обставин важливо в першу чергу зменшити її довжину  $S$ , ніж за будь яку ціну мінімізувати час руху  $T$  вздовж неї. Наприклад, при прокладанні тунелів метро, трамвайних, автобусних і троллейбусних шляхів або інших логістичних маршрутів (з періодичними зупинками) іноді краще суттєво зменшити об'єми робіт по облаштуванню і обслуговуванню шляхів руху транспортних засобів за рахунок несуттєвого збільшення часу руху вздовж таких маршрутів.

Отже, постановка задачі про пошук найкращого компромісу між двома факторами  $T$  і  $S$ ,

який можна визначити шляхом побудови та аналізу адекватного комплексного критерію оптимізації, виявляється цілком плідним. Очевидно, що для досягнення максимальної ефективності траєкторії має сенс відшукати найкращий відносний компроміс між величинами  $T$  і  $S$ , врахувавши їх функціональний взаємозв'язок. Для цього розглянемо двохфакторний критерій оптимізації у вигляді добутку окремих частинних критеріїв щодо функціоналу довжини  $S$  та функціоналу часу  $T$  [23]:

$$Q = T \cdot S \rightarrow \min_{\Lambda}, \quad (1)$$

де  $\Lambda$  – шукана просторова екстремальна крива.

Мультиплікативний критерій оптимізації (1) дозволяє оцінити, наскільки необхідно збіль-

шити час  $T$  руху матеріальної точки по шуканій кривій, щоб одночасно домогтися найбільшого зменшення її довжини  $S$  по відношенню до збільшення часу  $T$ . Саме це мається на увазі під найкращим відносним компромісом між зазначеними факторами.

Одразу зазначимо, що одночасна і окрема мінімізація обох функціоналів  $T$  і  $S$  не має сенсу, оскільки вони визначаються різними виразами та набувають своїх мінімальних значень на різних екстремалях.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Наведемо критичний аналіз наукових досліджень, які проведено в рамках пошуку рівнянь брахістохрони в різних постановках задач.

Уперше задачу про брахістохрону поставив і дослідив І. Бернуллі [1]. У 1696 р. він сформулював «проблему брахістохрони» в такій постановці: знайти форму кривої, рухаючись вздовж якої намистинка, що перебувала в початковий момент у стані спокою і яка прискорюється гравітацією, переміститься з одної заданої точки в іншу за мінімальний час. У цій задачі припускалося, що намистинка рухається без тертя у вертикальній площині під дією однорідного гравітаційного поля. І. Ньютон, В. Лейбніц, Г.Ф. Лопіталь, Я. Бернуллі, І. Бернуллі довели, що розв'язком цієї задачі є циклоїда [2]. Аналітичні розв'язки зазначеної «проблеми брахістохрони» з класичним використанням техніки варіаційного числення наведені у праці [3], а стосовно геометричної оптики – у [4]. Задачі про визначення форми брахістохрони з урахуванням сил кулонового тертя під час руху матеріальної точки у вертикальній площині в однорідному гравітаційному полі були досліджені Ashby та ін. [5], Heijden і Diepstraten [6]. У роботі Lipp [7] класична «проблема брахістохрони» Бернуллі з урахуванням сухого тертя представлена у термінах задачі теорії управління. В такій постановці задачі про брахістохрону параметром управління є похідна по часу від кута, який визначає напрямки руху матеріальної точки. Узагальнення задачі про пошук форми брахістохрони, яка лежить на циліндрі, з урахуванням кулонового тертя були виконані Covic і Vesković [8]. У роботах Hayen [9], В. Vratanaar і М. Saje [10] були сформульовані та розв'язані задачі про визначення форми брахістохрони у неконсервативних силових полях. Задача щодо визначення форми брахістохрони на циліндрі в однорідних силових полях була розв'язана в [11], а на циліндрах і сферах – у дисертації Palmieri [12]. Узагальнення задачі про брахістохрону на неоднорідні силові поля були розглянуті в статтях Aravind [13], Denman [14] і Venezian [15], причому в останній роботі була розв'язана

задача про брахістохрону в лінійних радіальних силових полях. У роботах Denman [14], Parnovsky [16], Tee [17] встановлені розв'язки цієї ж задачі у радіальних полях із силовою залежністю, яка є обернено пропорційною квадрату відстані між взаємодіючими точками. Подальші узагальнення задачі про брахістохрону для матеріальної точки, в яких вивчалися релятивістські ефекти, викладені в працях Goldstein і Bender [18], Scarpello і Ritelli [19]. У праці [20] проблема брахістохрони розглядається на поверхнях обертання зі збереженням енергії. Для цього використовуються як класичні рівняння Ейлера–Лагранжа, так і метод, розроблений для розв'язання низки задач геометричної оптики про поширення світла. В цій статті також розглядається випадок руху матеріальної точки із релятивістськими швидкостями. У [21] наведено нове узагальнення задачі про брахістохрону, в якій необхідно встановити форму кривої, що забезпечує переміщення матеріальної точки в однорідному гравітаційному полі за найменший час між заданою (стартовою) точкою і заданою кривою або між двома заданими кривими. Тертя в цих задачах не враховується. Узагальнена проблема розв'язується із застосуванням варіацій до різних кінцевих точок (точок фінішу). Ці задачі стосуються області варіаційних задач з вільними граничними умовами. Нові узагальнення постановки задачі про брахістохрону пов'язані з коченням без ковзання тіла скінченних розмірів по різних поверхнях. Розв'язок задачі про брахістохрону для тіла скінченних розмірів, що котиться по ній, був відомий E. Rogers [22], проте строге доведення і вивід рівнянь брахістохрони для такої задачі в його роботі відсутні. У свідоцтві авторського права [23] було вперше представлено і описано новий комплексний критерій оптимізації, який пропонується застосувати в цій статті до пошуку брахістохрони на трансцендентній поверхні. Цей науковий твір імплементує двохфакторний критерій оптимізації щодо пошуку брахістохрони на похилій площині в однорідному вертикальному гравітаційному полі тяжіння. В роботі [24] знайдено брахістохрону для матеріальної точки, яка рухається на трансцендентній поверхні, утвореній циклоїдою, без тертя в однорідному вертикальному гравітаційному полі тяжіння. У статті [25] методами класичного варіаційного числення були отримані рівняння брахістохрони для важкого однорідного циліндра, який перекочується без ковзання по вгнутій циліндричній виїмці, а також доведено ізохронність коливань його центра мас. Л.Д. Акуленком у роботі [26] були виведені рівняння брахістохрони для важкого однорідного диска, який перекочується вздовж неї без ковзання. Динаміка руху вертикального диска

по горизонтальній площині без ковзання досліджувалась у роботі А. Obradovic та ін. [27]. У [28] розглядається флюїдодинамічний варіант класичної проблеми брахістохрони Бернуллі. Розглянуто задачу про брахістохрону, в якій матеріальна точка замінена порожнистим циліндром, заповненим в'язкою рідиною. Поставлено і розв'язано задачу про встановлення форми кривої, яка з'єднує дві задані точки і вздовж якої циліндр перекоотиться за мінімальний час. Показано, що в загальному випадку шукана крива помітно відхиляється від циклоїди.

Підсумовуючи результати наведеного огляду літературних джерел, слід зазначити, що у всіх попередніх роботах використовувався класичний однофакторний критерій пошуку екстремалі, пов'язаний лише з мінімізацією часу  $T$  руху матеріальної точки вздовж шуканої кривої. Тому запропонований двофакторний критерій мінімізації добутку довжини кривої на час руху матеріальної точки вздовж неї дозволить встановити новий клас брахістохрон з властивостями, які мають очевидний практичний зміст.

**Постановка завдання.** Метою статті є створення і реалізація двофакторного критерію оптимізації (1) у вигляді добутку двох окремих функціоналів часу  $T$  і довжини  $S$  кривої руху матеріальної точки між двома заданими точками на трансцендентній поверхні. Зазначимо, що матеріальна точка рухається без тертя, без початкової швидкості і під дією однорідного вертикального поля тяжіння.

**Виклад основного матеріалу дослідження. Побудова функціоналів часу  $T$  та довжини  $S$ . Встановлення формули комплексного критерію оптимізації для заданої поверхні.** Введемо просторову систему координат  $OXYZ$  так, як це показано на рис. 1.

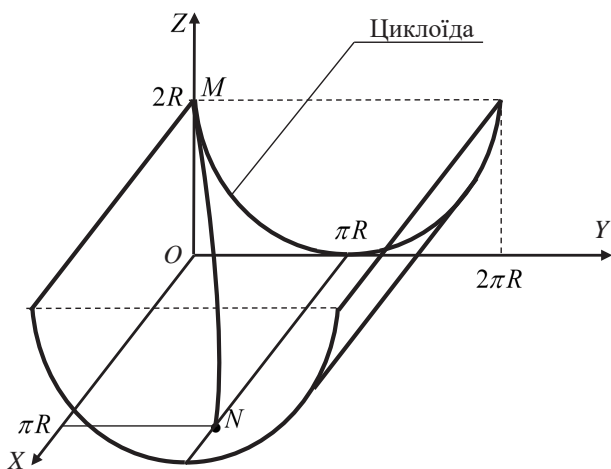


Рис. 1. Циліндрична поверхня, по якій без тертя рухається матеріальна точка

Матеріальна точка рухається по циліндричній поверхні, напрямною якої є циклоїда, а її твірні є паралельними осі  $OX$ . Параметричні рівняння заданої циклоїди визначаються двома координатами  $y(\theta)$  (ордината) і  $z(\theta)$  (апліката):

$$\begin{cases} y(\theta) = R(\theta - \sin \theta), \\ z(\theta) = R(1 + \cos \theta) \end{cases} \quad (2)$$

де  $\theta$  – параметр циклоїди,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $R$  – радіус твірного кола циклоїди.

Потрібно визначити залежність першої координати (абсциси)  $x(\theta)$  від параметра  $\theta$  так, щоб просторова траєкторія  $\Lambda(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = MN$  (рис. 1) матеріальної точки забезпечувала би мінімум двофакторного критерію (1) за умови її переміщення по трансцендентній поверхні (2) з точки старту  $M$  у точку фінішу  $N$ . Нехай точки  $M$  і  $N$  мають такі координати:  $M(x(0), y(0), z(0))$  – це стартова точка і  $N(x(\pi), y(\pi), z(\pi))$  – фінішна точка. Якщо врахувати рівняння (2) та граничні умови для абсциси  $x(0) = 0$ ,  $x(\pi) = \pi R$ , то координати точок старту і фінішу будуть такими:  $M(0, 0, 2R)$  і  $N(\pi R, \pi R, 0)$  (рис. 1).

Побудуємо **функціонал довжини  $S$**  на трансцендентній поверхні (2). Знайдемо диференціал дуги  $ds$  з урахуванням рівнянь голономної в'язі (2):

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} (\theta'_x)^2 dx. \quad (3)$$

Функціонал довжини  $S$  руху визначається інтегруванням виразу (3):

$$S = \int_0^{x_f} ds = \int_0^{x_f} \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} (\theta'_x)^2 dx, \quad (4)$$

де  $x_f(\pi) = \pi R$  – абсциса матеріальної точки у фінішній точці  $N$  простору, що відповідає параметру  $\theta = \pi$ . Тепер виведемо формулу для **функціоналу часу  $T$** . Оскільки матеріальна точка рухається по поверхні (2) без тертя, то система «матеріальна точка-поверхня» є консервативною. Побудуємо рівняння збереження енергії в нашій задачі:

$$mv^2/2 + mgz = h. \quad (5)$$

Визначимо константу  $h$  у співвідношенні (5) з урахуванням положення стартової точки  $M(0, 0, 2R)$ . В даному випадку у стартовій точці  $M$  початкова швидкість дорівнює нулю  $v = 0$ , а  $z = 2R$ . Отже, маємо вираз для  $h$ :

$$h = 2mgR.$$

Із співвідношення (5) отримаємо вираз для швидкості  $v$  руху матеріальної точки на трансцендентній поверхні (2):

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{2R - z}. \quad (6)$$

Виразимо диференціал  $dt$  з рівняння (5) та запишемо функціонал часу  $T$ :

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{gR}} \int_0^{x_f} \frac{\sqrt{1 + 4R^2 \sin^2(\theta/2)(\theta'_x)^2}}{\sin(\theta/2)} dx. \quad (7)$$

**Розв'язання поставленої задачі. Визначення брахистохрони заданої довжини. Аналіз інтегральних кривих.** Перш, ніж безпосередньо використовувати критерій (1), розглянемо допоміжну екстремальну задачу про знаходження брахистохрони заданої довжини, яка математично формулюється наступним чином:

$$T \rightarrow \min, \quad S = const. \quad (8)$$

Задача (8) є ізопериметричною задачею варіаційного числення, для вирішення якої необхідно скласти відповідну функцію Лагранжа, врахувавши функціонали (4) і (7) ([3, 29]):

$$L(\theta, \theta'_x) = \left( \lambda_1 + \frac{\lambda_0}{2\sqrt{gR}} \cdot \frac{1}{\sin(\theta/2)} \right) \cdot \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2(\theta/2)(\theta'_x)^2}, \quad (9)$$

де  $\lambda_0, \lambda_1$  – множники Лагранжа.

Далі розглядаємо задачу про екстремалі функціоналу з підінтегральною функцією  $L(\theta, \theta'_x)$ . Як і у варіаційній задачі про класичну брахистохрону, ця функція явно не залежить від  $x$ , тому для її розв'язання скористаємося першим інтегралом рівняння Ейлера – Лагранжа:

$$L - \theta'_x \cdot \frac{\partial L}{\partial \theta'_x} = C_0. \quad (10)$$

Після підстановки (9) в (10) дістанемо диференціальне рівняння:

$$\left( \lambda + \frac{1}{2\sqrt{gR}} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) = C \cdot \sqrt{1 + 4R^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\theta'_x)^2}, \quad (11)$$

де  $C = C_0/\lambda_0$  – нова довільна стала;  $\lambda = \lambda_1/\lambda_0$  – певний параметр ( $\lambda_0 \neq 0$ ). Відмінність цієї задачі від задачі про класичну брахистохрону полягає в тому, що довільна стала  $C$  в (11) залежить не тільки від граничної умови  $x(\pi) = \pi R$ , а й від параметра  $\lambda$ .

Отже, з рівняння (11) треба знайти функцію  $x(\theta, \lambda)$ , яка дасть можливість знайти параметричне представлення екстремальної просторової кривої  $\Lambda$ , яка лежить на поверхні (2). В явній формі цю залежність отримати не вдається, проте її можна отримати числовими методами.

Запишемо інтеграл, який визначає шукану функцію  $x(\theta, \lambda)$ :

$$x(\theta, \lambda) = 2RC \int_0^{\theta} \sin(\theta/2) \cdot \left[ \left( \lambda + \frac{1}{2\sqrt{gR}} \cdot \frac{1}{\sin(\theta/2)} \right)^2 - C^2 \right]^{-1/2} d\theta. \quad (12)$$

Зазначимо, що перша гранична умова в стартовій точці  $M$  тут автоматично виконується, оскільки за умови  $\theta = 0$  маємо  $x(0) = 0$ . Довільну сталу  $C$

у виразі (12) будемо шукати числовими методами в залежності від величини параметра  $\lambda$  з використанням другої граничної умови  $x(\pi) = \pi R$ . Тобто, надаючи параметру  $\lambda$  різних значень з області визначення підкореневого виразу (12) будемо отримувати відповідні сталі  $C$ , які насправді є функціями параметра  $\lambda$ . В подальших числових експериментах покладемо величину радіуса  $R$  твірного кола циклоїди (2) рівною одиниці.

Отже, стали  $C$  для кожного значення  $\lambda$  знайдемо із трансцендентного рівняння

$$2RC \int_0^{\pi} \sin(\theta/2) \cdot \left[ \left( \lambda + (2\sqrt{gR} \cdot \sin(\theta/2))^{-1} \right)^2 - C^2 \right]^{-1/2} d\theta = \pi R. \quad (13)$$

Наприклад, для випадку класичної брахистохрони (за умови  $\lambda = 0$ ) після числового розв'язання рівняння (13) дістанемо:  $C = 0,119$ . Графік залежності  $C = C(\lambda)$  наведено на рис. 2.

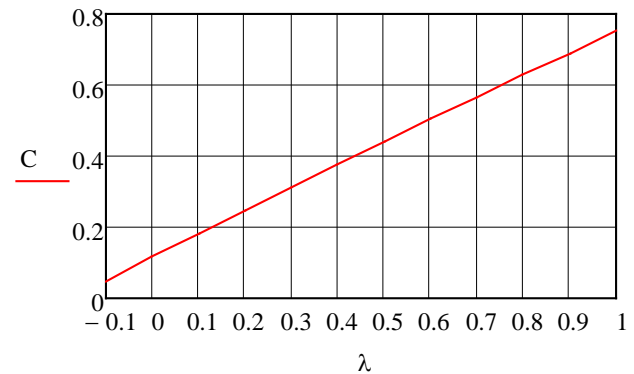


Рис. 2. Графік залежності  $C = C(\lambda)$

Наведемо графіки низки інтегральних кривих  $x(\theta, \lambda)$  для різних значень параметра  $\lambda$  за умови зміни параметра  $\theta$  (рис. 3). Нагадаємо, що окрема крива  $x(\theta, \lambda)$  є абсцисою брахистохрони екстремальної просторової кривої  $\Lambda$ . Нас будуть цікавити лише ті криві, які побудовані за умови  $\lambda > 0$ . Це пояснюється тим, що в усіх кривих за умови  $\lambda < 0$  довжина  $S$  є більшою, ніж за  $\lambda > 0$ .

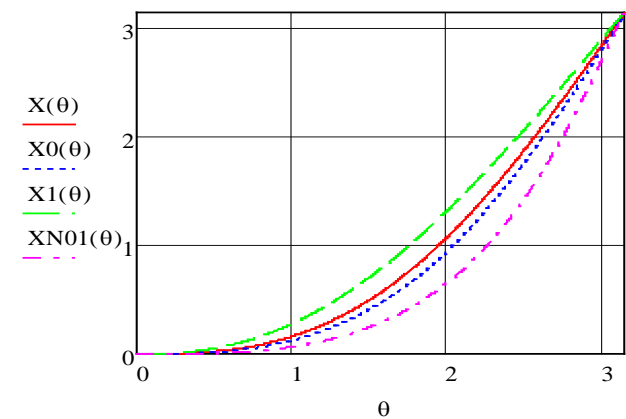


Рис. 3. Інтегральні криві  $x(\theta, \lambda)$  для різних значень параметра  $\lambda$



На рис. 3 позначено:  $X(\theta)$  – інтегральна крива, побудована за умови  $\lambda = 0,1$  (суцільна крива);  $X_0(\theta)$  – інтегральна крива, побудована за умови  $\lambda = 0$  (пунктирна лінія, це є абсциса класичної брахістохрони на трансцендентній поверхні (2));  $X_1(\theta)$  – інтегральна крива, побудована за умови  $\lambda = 1$  (штрихова крива);  $X_{N01}(\theta)$  – інтегральна крива, побудована за умови  $\lambda = -0,1$  (штрихпунктирна лінія). З наведених кривих з очевидністю випливає, що їх довжини змінюються від найбільшої (у штрихпунктирної кривої) до найменшої – у штрихової кривої. При збільшенні параметра  $\lambda$  будь-яка інтегральна крива  $x(\theta, \lambda)$ , що з’єднує дві фіксовані точки  $M$  і  $N$ , буде лежати вище всіх попередніх.

**Техніка обчислення величини двохфакторного критерію і його дослідження на екстремум.** Для обчислення величини критерію (1) побудуємо відповідний добуток двох функціоналів (4) та (7), які перетворені для інтегрування за змінною  $\theta$ . Цей вираз має такий вигляд:

$$Q(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{4gR}} \int_0^{\theta_x} \frac{\sqrt{1 + 4R^2 \sin^2(\theta/2)(\theta'_x)^2}}{\sin(\theta/2) \cdot \theta'_x} d\theta \cdot \int_0^{\theta_x} \frac{\sqrt{1 + 4R^2 \sin^2(\theta/2)(\theta'_x)^2}}{\theta'_x} d\theta, \quad (14)$$

де похідна  $\theta'_x$  обчислюється за формулою

$$\theta'_x = \sqrt{\left( \lambda + \frac{1}{2\sqrt{gR}} \cdot \frac{1}{\sin(\theta/2)} \right)^2 - C^2} / (2RC \sin(\theta/2))$$

для кожного значення параметра  $\lambda$  та відповідного йому значення сталої  $C$ .

Для знаходження мінімуму функції  $Q = Q(\lambda)$  можна було би скористатись необхідною умовою існування екстремуму функції однієї змінної, проте це призводить до громіздких виразів, які складно аналізувати. Скористаємося графічно-числовим методом пошуку екстремуму функції  $Q = Q(\lambda)$ . Після проведення числового експерименту за формулою (14) наведемо графік залежності  $Q = Q(\lambda)$  (рис. 4). На цьому графіку можна побачити, що він має чітко окреслений мінімум, який досягається за умови значення параметра  $\lambda_E = 0,24$  (рис. 4). Це дозволяє отримати оптимальну за довжиною криву за умови певного компромісного зростання часу руху вздовж отриманої кривої. Числовий аналіз показав, що для обраного варіанту параметрів поверхні (2) і граничних умов (рис. 1) виграш у відстані складає близько 1,1%, а програш у часі дорівнює 0,49% порівняно з класичною брахістохроною. Для

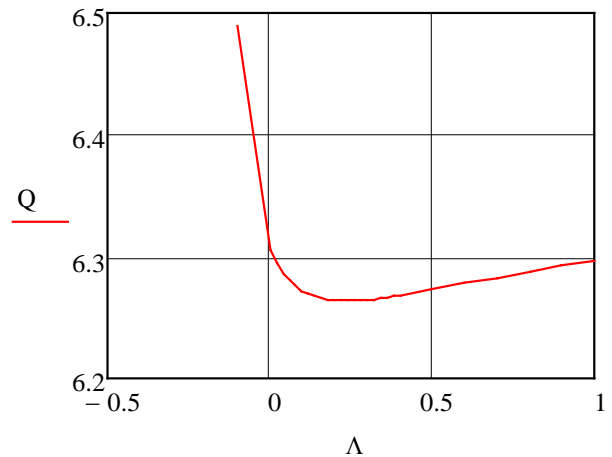


Рис. 4. Графік залежності критеріальної функції  $Q = Q(\lambda)$  від параметра  $\lambda$

інших поверхонь і граничних умов ці результати можуть бути більш значущими.

**Висновки.** В статті запропоновано новий методологічний підхід до постановки і розв’язання варіаційної задачі про брахістохрону на трансцендентній поверхні. В цьому підході враховується сумісна мінімізація добутку часу руху матеріальної точки та довжини кривої, вздовж якої здійснюється її брахістохронний рух. Така постановка задачі пов’язана з тим, що іноді важливо в першу чергу зменшити довжину кривої, ніж за будь яку ціну досягти на ній мінімуму часу руху.

Сформульовано відповідну ізопериметричну задачу, яку було розв’язано числовими методами. Розв’язок представлено в замкненій формі у вигляді системи параметричних рівнянь, які описують брахістохронні криві на трансцендентній поверхні. На основі розв’язання ізопериметричної задачі та з використанням двохфакторного критерію  $Q(\lambda)$  отримано оптимальний розв’язок задачі про брахістохрону на трансцендентній поверхні. Встановлено, що графік залежності величини критерію  $Q(\lambda)$  від параметра  $\lambda$  має явно виражений локальний мінімум, який дозволив знайти єдине компромісне значення параметра  $\lambda_E$ . Числовий аналіз підтвердив ефективність використання запропонованого критерію: для оптимальної за цим критерієм траєкторії час руху вздовж неї на 0,49 % більше, ніж для класичної брахістохрони, проте довжина цієї кривої виявляється меншою за довжину класичної брахістохрони на 1,1%.

#### Список літератури:

1. J. Bernoulli. Problema novum ad cuius solutionem mathematici invitantur, Acta Eruditorum, vol. 15, pp. 264–269, 1696.
2. W. Dunham, Journey Through Genius. New York: Penguin Books, 1991, 304 p.

3. I.M. Gelfand and S.V. Fomin. *Calculus of Variations*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1963, 232 p.
4. H. Erlichson, Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time, *Eur. J. Phys.*, vol. 20, no. 5, pp. 299–304, 1999. doi: 10.1088/0143-0807/20/5/301
5. N. Ashby et al. Brachistochrone with Coulomb friction, *Am. J. Phys.*, vol. 43, no. 10, pp. 902–906, 1975. doi: 10.1119/1.9976
6. A.M.A. van der Heijden and J.D. Diepstraten. On the brachistochrone with dry friction, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 10, no. 2, pp. 97–112, 1975. doi: 10.1016/0020-7462(75)90017-7
7. S. Lipp. Brachistochrone with Coulomb friction, *SIAM J. Control Optim.*, vol. 35, no. 2, pp. 562–584, 1997. doi: 10.1137/S0363012995287957
8. V. Covic and M. Veskovic. Brachistochrone on a surface with Coulomb friction, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 43, no. 5, pp. 437–450, 2008. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2008.02.004
9. J.C. Hayen. Brachistochrone with Coulomb friction, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 40, no. 8, pp. 1057–1075, 2005. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2005.02.004
10. B. Vratinar and M. Saje. On analytical solution of the brachistochrone problem in a non-conservative field, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 33, no. 3, pp. 489–505, 1998. doi: 10.1016/S0020-7462(97)00026-7
11. H.A. Yamani and A.A. Mulhem. A cylindrical variation on the brachistochrone problem, *Am. J. Phys.*, vol. 56, no. 5, pp. 467–469, 1988. doi: 10.1119/1.15755
12. D. Palmieri. The brachistochrone problem, a new twist to an old problem, Undergraduate Honors Thesis, Millersville University of PA, 1996.
13. P.K. Aravind. Simplified approach to brachistochrone problem, *Am. J. Phys.*, vol. 49, no. 9, pp. 884–886, 1981. doi: 10.1119/1.12389
14. H.H. Denman. Remarks on brachistochrone-tautochrone problem, *Am. J. Phys.*, vol. 53, no. 3, pp. 224–227, 1985. doi: 10.1119/1.14125
15. G. Venezian. Terrestrial brachistochrone, *Am. J. Phys.*, vol. 34, no. 8, p. 701, 1966. doi: 10.1119/1.1973207
16. A.S. Parnovsky. Some generalisations of the brachistochrone problem, *Acta Physica Polonica, A 93 Supplement*, pp. 5–55, 1998.
17. G. Tee. Isochrones and brachistochrones, *Neural, Parallel Sci. Comput.*, vol. 7, pp. 311–342, 1999.
18. H.F. Goldstein and C.M. Bender. Relativistic brachistochrone, *J. Math. Phys.*, vol. 27, no. 2, pp. 507–511, 1986.
19. G.M. Scarpello and D. Ritelli. Relativistic brachistochrone under electric or gravitational uniform field, *Z. Angew. Math. Mech.*, vol. 86, no. 9, pp. 736–743, 2006. doi: 10.1002/zamm.200510279
20. J. Gemmer et al. Generalizations of the brachistochrone problem, *Pi Mu Epsilon J.*, vol. 13, no. 4, pp. 207–218, 2011.
21. S. Mertens and S. Mingramm. Brachistochrones with loose ends, *Eur. J. Phys.*, vol. 29, pp. 1191–1199, 2008. doi: 10.1088/0143-0807/29/6/008
22. E. Rodgers. Brachistochrone and tautochrone curves for rolling bodies, *Am. J. Phys.*, vol. 14, pp. 249–252, 1946. doi: 10.1119/1.1990827
23. Legeza V.P. et al. Complex optimization criterion and its implementation in the brachistochron problem. Copyright certificate for a scientific work No. 126810, issued by the "Ukrainian National Office of Intellectual Property and Innovation" on 27.05. 2024 (in Ukrainian).
24. Legeza V. P. Brachistochronic motion of a material point on a transcendental surface // *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No. 3. Pp. 358–366.
25. Legeza V.P. Brachistochrone for a Rolling Cylinder // *Mechanics of Solids*, 2010, 45(1): 27–33. DOI: 10.3103/S002565441001005X
26. L.D. Akulenko. The brachistochrone problem for a disk. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 73, no. 4, pp. 371–378, 2009. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.08.015
27. A. Obradovic et al. The brachistochronic motion of a vertical disk rolling on a horizontal plane without slip. *Theor. Appl. Mech.*, vol. 44, no. 2, pp. 237–254, 2017. doi: 10.2298/TAM171002015O
28. S.S. Gurram et al. On the brachistochrone of a fluid-filled cylinder. *J. Fluid Mech.*, vol. 865, pp. 775–789, 2019. doi: 10.1017/jfm.2019.70
29. L.P. Eltsgolts, *Differential Equations and Variational Calculus*. University Press of the Pacific, 29.12. 2003 p. 444 p. ISBN-10:1410210677

**Legeza V.P., Neshchadym O.M. A TWO-FACTOR OPTIMIZATION CRITERION AND ITS IMPLEMENTATION IN THE PROBLEM ABOUT BRACHISTOHRON ON A TRANSCENDENT SURFACE**

*The variational problem of finding the optimal curve of movement of a material point on the transcendental surface, which is a horizontal cylinder whose guide is a cycloid, is considered. A material point moves along a surface without friction and without initial velocity in a vertical uniform gravity field. The difference from the previous formulation of variational problems is that the search for the extreme curve is based on the use of a two-factor optimization criterion instead of the minimization of only one classical functional of time. The proposed criterion consists in minimizing the product of the functional of the time of movement of a material point and the functional of the length of the extreme curve along which the point moves. This formulation of the problem is connected with the fact that usually the brachistochron, which is the result of the solution of the variational problem in the classical formulation as the extremum of the minimum of only the time functional, has a sufficiently large length in some practical logistic problems. A corresponding isoperimetric problem was formulated, which was solved by numerical methods. On the basis of its solution using the two-factor criterion  $Q(\lambda)$ , the optimal solution of the brachistochron problem on the transcendental surface was obtained. The solution is presented in a closed form (for one of the coordinates – in quadratures) in the form of a system of three parametric equations that algebraically describe the brachistochron curves on the transcendental surface. The search for extremals came down to the usual setting of the minimum of the criterion function  $Q(\lambda)$  depending on the parameter values  $\lambda$ . Using numerical methods, it was established that the graph of the dependence of the value of the criterion  $Q(\lambda)$  on the parameter  $\lambda$  has a clearly expressed local minimum, which made it possible to find a single compromise value of the parameter  $\lambda_E$ . Numerical analysis confirmed the effectiveness of using the proposed criterion: for a trajectory optimal according to this criterion, the point movement time along it is only 0.49% longer than for a classical brachistochrone on a transcendental surface, but the length of this curve turns out to be 1.1% shorter than the length of a classical brachistochrone.*

**Key words:** two-factor optimization criterion, time functional, length functional, brachistochrone, transcendental surface, cycloid, isoperimetric problem.